Ispitivanje složenosti broja pomoću rastavljanja polinoma na faktore

1.Motivacija

Pretpostavimo da smo se našli u pozicij da treba dati odgovor na sledeće pitanje:

„Da li je broj 1 280 000 401 složen ili prost? A broj 160 401?“

Mora se priznati da, kada su u pitanju učenici osnovne skole postavljeno pitanje nije nimalo jednostavno.Uočićemo da znanje koje učenik posjeduje o kriterijima djeljivosti nije uopće dovoljno da uspiješno mogu riješiti ovakav ili njemu sličan problem. Postavlja se ,naravno, pitanje kako uopće doći do rješenja i da li učenik na ovom stepenu obrazovanja može usvojiti neka nova znanja koja bi mu omogućila da riješi problem.Odgovor je povrdan,ali samo kad su u pitanju oni najbolji. U nastavku izlaganja pokazaćemo jedan metod ispitivanja složenosti datog prirodnog broja ,a koji se zasniva na faktorizacij polinoma.
Učenici moraju da znaju sledeće formule:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$$
$$a^3-b^3=(a-b)\cdot\left(a^2+ab+b^2\right)$$
$$a^3+b^3=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)$$

Osim toga, moraju da znaju (i da imaju dosta iskustva) i ostale oblike rastavljanja polinoma, kao što su: izvlačenje zajedničkog faktora ispred zagrade, grupisanje sličnih izraza itd.

2.Prezentacija metode

Ovaj metod prezentiraćemo putem nekoliko karakterističnih primjera.Ideja je da se nastavnicima omogući da i sami kreiraju slične probleme, koristeći iskustvo u faktorizacij polinoma koje posjeduju i koje mogu uspiješno prenijeti na svoje darovite đake.
Budući da je problem s početka izlaganja popriličmo složen, njegovo rješavanje ostavimo za kasnije, a sada se posvetimo nešto lakšim slučajevima.

Primjer 1. Ispitati da li je broj 629 prost?

Rješenje: Uočimo da se broj može napisati na sledeći način: $629=625+4=5^4+4$

Umjesto toga, problem ćemo rješavati u općenitom obliku, promatrajući polinom n^4+4
Dakle, provjerimo da li se taj polinom može faktorizirati:

$$n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-(2n)^2=\left(n^2+2-2n\right)\cdot\left(n^2+2+2n\right)$$

Primijetimo sledeće: ako je n=1, izraz n^4+4 je prost broj, a ako je n>1, taj je izraz složen broj. Prema tome, dobili smo odgovor na pitanje o složenosti broja 629, a to je da je on složen broj. Šta više, dobili smo i njegovu faktorizaciju:

$$629=\left(5^2-10+2\right)\cdot\left(5^2+10+2\right)=17\cdot 37$$

Primjedba 1: Koristeći dobijeni polinomski zapis, uočavamo da nastavnici i sami mogu konstruirati slične složene brojeve (čija složenost nije nimalo očigledna).Pri tome, ne smijemo izgubiti iz vida, da dobijeni broj treba da bude takav da se na njemu ne može iskoristiti neki od poznatih kriterija djeljivosti.

Primjer 2. Provjeriti da li je broj 247 prost broj?

Rješenje: Slično predhodnom primjeru imamo $247 = 256 - 9 = 4^4 - 9$

Razmotrimo sada, općeniti slučaj, tj. odgovarajući polinom $n^4 - 9$. Tako imamo:

$$n^4 - 9 = (n^2)^2 - 3^2 = (n^2 - 3)\cdot(n^2 + 3)$$

Odakle se vidi da je taj izraz za n >2, složen broj. Uzimajući $n = 4$, zaključujemo da je broj 247 složen broj i da mu je faktorizacija:

$$247 = (4^2 - 3)\cdot(4^2 + 3) = 13 \cdot 19$$

No, ovdje se mogao dobiti i malo drugačiji zapis datog broja.

Naime, $247 = 243 + 4 = 3^5 + 3 + 1$, pa se problem svodi na faktorizaciju polinoma $a^5 + a + 1$.
Osnovna ideja je da se iskoristi „razlika kubova“.

$$a^5 + a + 1 = a^5 - a^2 + a^2 + a + 1 = a^2 \cdot (a^3 - 1) + a^2 + a + 1 = a^2 \cdot (a-1)\cdot(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 =$$
$$= (a^2 + a + 1)\cdot(a^2(a-1) + 1) = (a^2 + a + 1)\cdot(a^3 - a^2 + 1)$$

Ovo nastavnicima daje mogućnost za konstrukcije „neobičnih“ složenih brojeva.

Primjer 3. Da li je broj 1057 prost ili složen?

Rješenje: Primijetimo da je jedna od mogućnosti da dati broj zapišemo u obliku:
$1057 = 1024 + 32 + 1 = 2^{10} + 2^5 + 1$.
To nam daje ideju da razmotrimo polinom : $a^{10} + a^5 + 1$. Da bismo napravili njegovu faktorizaciju, koristićemo predhodni primjer:

$$a^{10} + a^5 + 1 = a^{10} - a + (a^5 + a + 1) = a \cdot (a^9 - 1) + (a^2 + a + 1)\cdot(a^3 - a^2 + 1) =$$
$$= a \cdot ((a^3)^3 - 1) + (a^2 + a + 1)\cdot(a^3 - a^2 + 1) =$$
$$= a \cdot (a^3 - 1)\cdot(a^6 + a^3 + 1) + (a^2 + a + 1)\cdot(a^3 - a^2 + 1) =$$
$$= a \cdot (a-1)\cdot(a^2 + a + 1)\cdot(a^6 + a^3 + 1) + (a^2 + a + 1)\cdot(a^3 - a^2 + 1) =$$
$$= (a^2 + a + 1)\cdot[a \cdot (a-1)\cdot(a^6 + a^3 + 1) + a^3 - a^2 + 1] =$$
$$= (a^2 + a + 1)\cdot(a^8 - a^7 + a^5 - a^4 + a^3 - a + 1)$$

Iz ovoga se vidi da je izraz $a^{10} + a^5 + 1$, za a >1, složen broj, pa je, dakle, broj 1057 složen..
Njegova faktorijazcija je: $1057 = 7 \cdot 151$

Sad smo već u mogućnosti da damo odgovor i na pitanje postavljeno na samom početku izlaganja.

Primjer 4. Dokazati da se broj 160401 može predstaviti u obliku proizvoda dva trocifrena broja.

Rješenje: Dosadašnje iskustvo nam sugerira da se dati broj može napisati u obliku:
$160401 = 160000 + 400 + 1 = 2^4 \cdot 10^4 + 2^2 \cdot 10^2 + 1 = 20^4 + 20^2 + 1$

Opet razmotrimo odgovarajući polinom $a^4 + a^2 + 1$ i faktorizirajmo ga (ponovo koristeći „razliku kubova“):

$$
\begin{aligned}
a^4 + a^2 + 1 &= a^4 - a + a^2 + a + 1 = a \cdot (a^3 - 1) + a^2 + a + 1 = \\
&= a \cdot (a-1) \cdot (a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 = \\
&= (a^2 + a + 1) \cdot (a^2 - a + 1)
\end{aligned}
$$

Za $a = 20$, dobijamo $160401 = 421 \cdot 381$

Primjer 5. Da li je 1280000401 složen broj?

Rješenje: Znajući da je $2^7 = 128$, imamo:
$1280000401 = 2^7 \cdot 10^7 + 2^2 \cdot 10^2 + 1 = 20^7 + 20^2 + 1$

Izvršimo faktorizaciju polinoma $a^7 + a^2 + 1$:

$$
\begin{aligned}
a^7 + a^2 + 1 &= a^7 - a + a^2 + a + 1 = a \cdot (a^6 - 1) + a^2 + a + 1 = \\
&= a \cdot (a^3 - 1) \cdot (a^3 + 1) + a^2 + a + 1 = \\
&= a \cdot (a^3 + 1) \cdot (a-1) \cdot (a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1 = \\
&= (a^2 + a + 1) \cdot \left[a \cdot (a^3 + 1) \cdot (a-1) + 1\right] = \\
&= (a^2 + a + 1) \cdot (a^5 - a^4 + a^2 - a + 1)
\end{aligned}
$$

Prema tome, uzimanjem za $a = 20$, dobija se :

$1280000401 = (20^2 + 20 + 1) \cdot (20^5 - 20^4 + 20^2 - 20 + 1) = 421 \cdot 3040381$
Što znači da je dati broj složen.

Iz predhodnog se da zaključiti da su ovim otvorene velike mogućnosti za konstrukciju složenih brojeva čija složenost uopće nije tako očigledna. To prepuštamo maštovitim nastavnicima, koji sada mogu pronaći i masu sličnih polinoma čija se faktorizacija može iskoristiti za takve konstrukcije.

Primjer 6. Odrediti sve prirodne brojeve a za koje je $a^8 + a + 1$ prost broj.

Rješenje: Slično predhodnim primjerima imamo:

$$a^8+a+1=a^8-a^2+a^2+a+1=a^2\cdot\left(a^6-1\right)+a^2+a+1=a^2\cdot\left(a^3-1\right)\cdot\left(a^3+1\right)+a^2+a+1=$$
$$=a^2\cdot(a-1)\cdot\left(a^2+a+1\right)\cdot\left(a^3+1\right)+a^2+a+1=$$
$$=\left(a^2+a+1\right)\cdot\left[a^2\cdot(a-1)\cdot\left(a^3+1\right)+1\right]=$$
$$=\left(a^2+a+1\right)\cdot\left(a^6-a^5+a^3-a^2+1\right)$$

Budući da je, za a >1 , $a^2+a+1>1$ i $a^6-a^5+a^3-a^2+1>1$, zaključujemo da je broj a^8+a+1 složen za a >1 , a prost za a = 1 i tada je: $a^8+a+1=3$.

Primjer 7. Odrediti sve prirodne brojeve a za koje je $a^4+2a^3-3a^2-4a-1$ složen broj. Koristeći se time provjeriti da li je 779 prost.

Rješenje: Ovdje je situacija zaista mnogo složenija nego u prethodnim primjerima i potrebno je dosta iskustva u faktorizacij polinoma da bi se ona uspješno sprovela.

$$a^4+2a^3-3a^2-4a-1=a^4+2a^3+a^2-4a^2-4a-1=$$
$$=\left(a^4+2a^3+a^2\right)-\left(4a^2+4a+1\right)=$$
$$=\left(a^2+a\right)^2-(2a+1)^2=$$
$$=\left(a^2+a-2a-1\right)\cdot\left(a^2+a+2a+1\right)=$$
$$=\left(a^2-a-1\right)\cdot\left(a^2+3a+1\right)$$

Za a = 1 je $a^4+2a^3-3a^2-4a-1=-5$, što nije prirodan broj , dok za a = 2 imamo $a^4+2a^3-3a^2-4a-1=11$, tj. u pitanju je prost broj. Međutim, za a >2 , se dobije da je $a^2-a-1>1$ i $a^2+3a+1>1$, odnosno broj $a^4+2a^3-3a^2-4a-1$ je složen.

U konkretnom slučaju imamo:

$$779=5^4+2\cdot5^3-3\cdot5^2-4\cdot5-1=\left(5^2-5-1\right)\cdot\left(5^2+15+1\right)=19\cdot41$$

Primjedba 2. Predhodni primjer pokazuje kako se mogu formulirati vrlo teški problemi u vezi sa ispitivanjem složenosti datog broja. Naravno da pri tome treba imati mjeru i ne treba pretjerivati suviše. Naročito u početku treba birati što jednostavnije primjere, pa onda postepeno uvoditi teže probleme. Preporučije se da predhodno đaci dobro uvježbaju faktorizaciju polinoma.

Za samostalan rad:

1) Dokazati da je broj 390629 složen broj. Rastaviti ga na faktore.
2) Ispitati da li je broj 810901 složen ili prost. Ako je složen, rastavi ga na faktore.
3) Dokazati da je broj 39135427 složen. Naći faktore tog broja.