Rastavljanje polinoma na proste faktore - zadaci (II)

Z.1. Rastaviti na faktore sledeće izraze koristeći se osnovnim algebarskim identitetima, grupisanjem i izvlačenjem zajedničkog faktora:

a) $12a^2b - 18ab^2 = 6ab \cdot 2a - 6ab \cdot 3b = 6ab(2a - 3b)$

b) $18a^4b^3c^7 - 63a^5b^3c^3 + 81a^3b^4c^4 = 9a^3b^3c^3 \cdot 2ac^4 - 9a^3b^3c^3 \cdot 8a^2 + 9a^3b^3c^3 \cdot 9bc = 9a^3b^3c^3 \cdot (2ac^4 - 7a^2 + 9bc)$

c) $(3a + 4b)(a - b) + (6b + 5a)(a - b) - (a - b)^2 - (7a - 15b)(b - a) =$
$(3a + 4b)(a - b) + (6b + 5a)(a - b) - (a - b)^2 + (7a - 15b)(a - b) =$
$(a - b)[3a + 4b + 6b + 5a - (a - b) + 7a - 15b] =$

$(a - b)(14a - 4b) = 2(7a - 2b)(a - b)$

d) $48a^3b^2c^2 - 16a^2b^3c^2 - 32a^2b^2c^3 =$

$16a^2b^2c^2 \cdot 3a - 16a^2b^2c^2 \cdot b - 16a^2b^2c^2 \cdot 2c =$

$16a^2b^2c^2 \cdot (3a - b - 2c)$

e) $3x(2a - 3b) - 2a + 3b = 3x(2a - 3b) - 1 \cdot (2a - 3b) =$

$(2a - 3b)(3x - 1)$

f) $(x^2 + 2xy + y^2) - x - y = (x + y)^2 - 1 \cdot (x + y) = (x + y)(x + y - 1)$

g) $y^3 - 1 - (y - 1)^3 = (y - 1)(y^2 + y + 1) - (y - 1)^2(y - 1) =$

$(y - 1)[y^2 + y + 1 - (y - 1)^2] = (y - 1)(y^2 + y + 1 - y^2 + 2y - 1) =$

$3y(y - 1)$

h) $a^4 - 2a^2 + 1 - (a + 1)^2 = [(a^2)^2 - 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1^2] - (a + 1)^2 =$

$(a^2 - 1)^2 - (a + 1)^2 = [(a - 1)(a + 1)]^2 - (a + 1)^2 =$

$(a - 1)^2(a + 1)^2 - 1 \cdot (a + 1)^2 = (a + 1)^2[(a - 1)^2 - 1^2] =$

$(a + 1)^2(a - 1 - 1)(a - 1 + 1) = a(a - 2)(a + 1)^2$

$i)\ (9a^2-16b^2)(3a+4b)-(3a-4b)^2(3a+4b) =$

$(3a+4b)[(9a^2-16b^2)-(3a-4b)^2] =$

$(3a+4b)[9a^2-16b^2-9a^2+24ab-16b^2] =$

$(3a+4b)(24ab-32b^2) = 8b(3a-4b)(3a+4b)$

j) $32x^5-144x^4y+216x^3y^2-108x^2y^3 =$

$4x^2\cdot(8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3) =$

$$4x^2\cdot\left(\underbrace{(2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 3y+3\cdot 2x\cdot(3y)^2-(3y)^3}_{Kub\ razlike}\right) =$$

$4x^2\cdot(2x-3y)^3$

k) $64x^6y^2-729y^8 = y^2(64x^6-729y^6) = y^2\cdot\left(\underbrace{(8x^3)^2-(27y^3)^2}_{Razlika\ kvadrata}\right) =$

$y^2(8x^3-27y^3)(8x^3+27y^3) =$

$$y^2\left(\underbrace{(2x)^3-(3y^3)}_{Razlika\ kubova}\right)\left(\underbrace{(2x)^3+(3y^3)}_{Zbir\ kubova}\right) =$$

$y^2(2x-3y)((2x)^2+2x\cdot 3y+(3y)^2)(2x+3y)((2x)^2-2x\cdot 3y+(3y)^2)$

$= y^2(2x-3y)(2x+3y)(4x^2+6xy+9y^2)(4x^2-6xy+9y^2)$

Z.2. Rastaviti na faktore sledeće izraze korisreči se OAI i grupisanjem članova:

a) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=\underbrace{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}_{Razlika\ kvadrata}=$

$\left(2ab-(a^2+b^2-c^2)\right)\left(2ab+(a^2+b^2-c^2)\right)=$

$(2ab-a^2-b^2+c^2)(2ab+a^2+b^2-c^2)=$

$\left(c^2-\underbrace{(a^2-2ab+b^2)}_{Kvadrat\ razlike}\right)\left(\underbrace{(a^2+2ab+b^2)}_{Kvadrat\ zbira}-c^2\right)=$

$\left(\underbrace{c^2-(a-b)^2}_{Razlika\ kvadrata}\right)\left(\underbrace{(a+b)^2-c^2}_{Razlika\ kvadrata}\right)=$

$\left(c-(a-b)\right)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)$

b) $\underbrace{(4x-a)^2-(4a-x)^2}_{Razlika\ kvadrata}=[4x-a-(4a-x)][4x-a+4a-x]=$

$[4x-a-4a+x][4x-a+4a-x]=(5x-5a)(3x+3a)=$

$5(x-a)\cdot 3(x+a)=15(x-a)(x+a)$

c) $(a+b)^2+(a+c)^2-(c+d)^2-(b+d)^2=$

$\left[\underbrace{(a+b)^2-(c+d)^2}_{Razlika\ kvadrata}\right]+\left[\underbrace{(a+c)^2-(b+d)^2}_{Razlika\ kvadrata}\right]=$

$[(a+b)-(c+d)][(a+b)+(c+d)]+[(a+c)-(b+d)][(a+c)+(b+d)]=$

$[a+b-c-d][a+b+c+d]+[a+c-b-d][a+c+b+d]=$

$[a+b+c+d]\cdot[a+b-c-d+a+c-b-d]=$

$[a+b+c+d][2a-2d]=2(a-d)(a+b+c+d)$

d) $(2a-3b)^4-(3a+2b)^4=\underbrace{[(2a-3b)^2]^2-[(3a+2b)^2]^2}_{Razlika\ kvadrata}=$

$\left[\underbrace{(2a-3b)^2-(3a+2b)^2}_{Razlika\ kvadrata}\right]\cdot[(2a-3b)^2+(3a+2b)^2]=$

$[2a-3b-(3a+2b)][2a-3b+3a+2b][(2a-3b)^2+(3a+2b)^2]=$

$[-a-5b][5a-b][4a^2-12ab+9b^2+9a^2+12ab+4b^2]=$

$(-a-5b)(5a-b)(13a^2+13b^2)=-13(a+5b)(5a-b)(a^2+b^2)$

e) $4a^4-4b^4+9x^4-9y^4-12a^2x^2+12b^2y^2$ = (grupišemo sabirke)

$[4a^4-12a^2x^2+9x^4]-1\cdot[4b^4-12b^2y^2+9y^4]=$

$\left[\underbrace{(2a^2)^2-2\cdot2a^2\cdot3x^2+(3x^2)^2}_{Kvadrat\ razlike}\right]-\left[\underbrace{(2b^2)^2-2\cdot2b^2\cdot3y^2+(3y^2)^2}_{Kvadrat\ razlike}\right]=$

$\underbrace{[2a^2-3x^2]^2-[2b^2-3y^2]^2}_{Ralika\ kvadrata}=$

$[2a^2-3x^2-(2b^2-3y^2)]\cdot[2a^2-3x^2+2b^2-3y^2]=$

$[2a^2-3x^2-2b^2+3y^2]\cdot[2a^2-3x^2+2b^2-3y^2]$

f) Za samostalan rad (rastaviti na faktore):

$4a^2+9b^2-4c^2-12ab$

g) Za samostalan rad (rastaviti na faktore):

$100a^2-9(5a-b)^2$

h) Za samostalan rad:

$27a^3-48ab^2-36a^2b+64b^3$

i) Za samostalan rad:

$(18x^3+4y^3)^2-(9x^3-5y^3)^2=$

Prije nego se primijeni *metoda grupisanja* ponekad neki član izraza treba rastaviti kao sumu dva prikladno odabrana sabirka.

Ako se radi o polinomu drugog stepena $ax^2 + bx + c$ onda linearni član bx treba napisati kao sumu dva sabirka, ali tako da proizvod koeficijenata ta dva sabirka bude jednak slobodnom članu ,c, polinoma.

Također, vrijedi: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdje su x_1 i x_2 nule tog polinoma koje određujemo pomoću formule:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Z.3. Rastaviti na faktore metodom grupisanja:

a) $a^3 - 6a + 5 = a^3 - a - 5a + 5 = (a^3 - a) - 1 \cdot (5a - 5) =$

$a\underbrace{(a^2 - 1)}_{R.k.} - 5(a - 1) = a(a - 1)(a + 1) - 5(a - 1) =$

$(a - 1)[a(a + 1) - 5] = (a - 1)(a^2 + a - 5)$

b) $a^4 + b^4 + a^2b^2$

Ovdje nam treba $2a^2b^2$ da bi bilo $a^4 + b^4 + 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2$

Zbog toga ćemo uzeti $a^2b^2 = 2a^2b^2 - a^2b^2$. Imamo:

$a^4 + b^4 + a^2b^2 = (a^4 + b^4 + 2a^2b^2) - a^2b^2 = \underbrace{(a^2 + b^2)^2 - (ab)^2}_{Razlika\ kvadrata} =$

$= (a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$

c) $a^2 + a - 30 = a^2 + 6a - 5a - 30 = (a^2 - 5a) + (6a - 30) =$

$a(a - 5) + 6(a - 5) = (a - 5)(a + 6)$

d) $a^2 - a - 56 = a^2 - 8a + 7a - 56 = a(a - 8) + 7(a - 8) =$

$= (a - 8)(a + 7)$

e) $a^2 + a - 6 = a^2 + 3a - 2a - 6 = a(a+3) - 2(a+3) =$

$(a+3)(a-2)$

f) Za samostalan rad: $x^2 + 5x + 6$; g) Za sam. rad: $abc + y^2 - (ab + c)y =$

Z.4. Rastaviti na faktore metodom grupisanja i koristeći OAI:

a) $a^5 + a^3b^2 + ab^4 = a \cdot (a^4 + a^2b^2 + b^4) =$

$$a\left((a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2\right) = a\left[\underbrace{(a^2+b^2)^2 - (ab)^2}_{R.k.}\right] =$$

$a(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$

b) $a^8 + a^4b^4 + b^8 = (a^4)^2 + a^4b^4 + (b^4)^2$

Vidimo da nam ovdje treba $2a^4b^4$ da bi bilo $(a^4)^2 + 2a^4b^4 + (b^4)^2 = (a^4 + b^4)^2$

Zbog toga ćemo uzeti $a^4b^4 = 2a^4b^4 - a^4b^4$. Imamo:

$$a^8 + a^4b^4 + b^8 = (a^4)^2 + a^4b^4 + (b^4)^2 = [(a^4)^2 + 2a^4b^4 + (b^4)^2] - a^4b^4$$

$$= \underbrace{(a^4+b^4)^2 - (a^2b^2)^2}_{Razlika\ kvadrata} = (a^4 + b^4 - a^2b^2)(a^4 + b^4 + a^2b^2)$$

Izraz $a^4 + b^4 + a^2b^2$ već smo faktorizirali (vidi Z.3 (b)), pa konačno ,imamo:

$$a^8 + a^4b^4 + b^8 = (a^4 + b^4 - a^2b^2)(a^2 + b^2 - ab)(a^2 + b^2 + ab)$$

c) $a^4 + 4 = (a^2)^2 + 2^2$

Ovde nam treba $2 \cdot a^2 \cdot 2 = 4a^2$ da bi bilo: $(a^2)^2 + 4a^2 + 2^2 = (a^2 + 2)^2$

Zbog toga, imamo:

$$a^4 + 4a^2 = [(a^2)^2 + 4a^2 + 2^2] - 4a^2 = \underbrace{(a^2+2)^2 - (2a)^2}_{Razlika\ kvadrata} =$$

$(a^2 + 2 - 2a) \cdot (a^2 + 2 + 2a)$

d) $81x^4 + 4y^4$

Slično kao i u predhodnom zadatku.

$81x^4 + 4y^4 = (9x^2)^2 + (2y^2)^2 =$

$[(9x^2)^2 + 2 \cdot 9x^2 \cdot 2y^2 + (2y^2)^2] - 2 \cdot 9x^2 \cdot 2y^2 =$

$(9x^2 + 2y^2)^2 - 36x^2y^2 = \underbrace{(9x^2 + 2y^2)^2 - (6xy)^2}_{Razlika\ kvadrata} =$

$(9x^2 + 2y^2 - 6xy) \cdot (9x^2 + 2y^2 + 6xy)$

e) $x^4 + 64y^4$

$x^4 + 64y^4 = (x^2)^2 + (8y^2)^2$

Ovde nam treba $2 \cdot x^2 \cdot 8y^2 = 16x^2y^2$ da bi bilo:

$x^4 + 16x^2y^2 + 64y^4 = (x^2 + 8y^2)^2$.Zbog toga, imamo:

$[x^4 + 16x^2y^2 + 64y^4] - 16x^2y^2 = \underbrace{(x^2 + 8y^2)^2 - (4xy)^2}_{Razlika\ kvadrata} =$

$[x^2 + 8y^2 - 4xy] \cdot [x^2 + 8y^2 + 4xy]$

Z.5. Rastaviti na faktore metodom grupisanja:

a) $a^4 + a^2 + 1$

I način:

Ovde nam treba $2a^2$ da bi bilo $a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2 + 1)^2$

Zbog toga ćemo uzeti $a^2 = 2a^2 - a^2$. Imamo:

$a^4 + a^2 + 1 = a^4 + 2a^2 + 1 - a^2 = ((a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1^2) - a^2 =$

$\underbrace{(a^2 + 1)^2 - a^2}_{R.k.} = (a^2 + 1 - a)(a^2 + 1 + a)$

II način:

Osnovna ideja je da se iskoristi „razlika kubova“:

$$a^4+a^2+1=(a^4-a)+a+a^2+1=$$

$$a(a^3-1)+a+a^2+1=a(a-1)(a^2+a+1)+1\cdot(a+a^2+1)=$$

$$(a^2+a+1)(a(a-1)+1)=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$$

b) a^5+a+1

Osnovna ideja je da se iskoristi „razlika kubova“. Naime, datom izrazu ćemo dodati i oduzeti a^2. Slično kao u predhodnom zadatku:

$$a^5+a+1=\left(a^5-a^2\right)+(a^2+a+1)=a^2(a^3-1)+1\cdot(a^2+a+1)=$$

$$a^2(a-1)(a^2+a+1)+1\cdot(a^2+a+1)=$$

$$(a^2+a+1)(a^2(a-1)+1)=(a^2+a+1)(a^3-a^2+1)$$

c) a^3+a^2+4

Ovde je situacija malo složenija nego u predhodna dva primjera.Naime, ovde ćemo iskoristiti „zbir kubova“ i „razliku kvadrata“ i to tako što ćemo datom izrazu dodati i oduzeti 8. Imamo:

$$a^3+a^2+4=(a^3+8)+(a^2+4-8)=\left(\underbrace{a^3+2^3}_{Zbir\ kubova}\right)+\left(\underbrace{a^2-2^2}_{Raz.kv.}\right)=$$

$$(a+2)(a^2-2a+4)+(a-2)(a+2)=$$

$$(a+2)(a^2-2a+4+a-2)=(a+2)(a^2-a+2)$$

d) Za samostalan rad:

$$a^{10}+a^2+1$$

Uputa: Koristiti i rješenje z.5 (b).

Z.6. Koristeći se OAI i metodom grupisanja faktorizirati sledeće izraze:

a) $a^3b^2 - a^2b^3 - a^3c^2 + a^2c^3 + b^3c^2 - b^2c^3 =$

Ovde grupišemo po dva sabirka (kako je označeno bojama):

$(a^3b^2 - a^3c^2) - (a^2b^3 - a^2c^3) + (b^3c^2 - b^2c^3) =$

$a^3(b^2 - c^2) - a^2(b^3 - c^3) + b^2c^2(b - c) =$

$a^3(b - c)(b + c) - a^2(b - c)(b^2 + bc + c^2) + b^2c^2(b - c) =$

$(b - c)[a^3(b + c) - a^2(b^2 + bc + c^2) + b^2c^2] =$

$(b - c)[a^3b + a^3c - a^2b^2 - a^2bc - a^2c^2 + b^2c^2] =$

U srednjoj zagradi grupišemo sabirke na način kako je označeno bojama:

$= (b - c)[(a^3b - a^2bc) + (a^3c - a^2c^2) - (a^2b^2 - b^2c^2)]$

$= (b - c)[a^2b(a - c) + a^2c(a - c) - b^2(a^2 - c^2)]$

$= (b - c)[a^2b(a - c) + a^2c(a - c) - b^2(a - c)(a + c)]$

$= (b - c)(a - c)[a^2b + a^2c - b^2(a + c)]$

$= (b - c)(a - c)[a^2b + a^2c - b^2a - b^2c]$

Sada u srednjoj zagradi grupišemo po dva sabirka:

$= (b - c)(a - c)[(a^2b - b^2a) + (a^2c - b^2c)]$

$= (b - c)(a - c)[ab(a - b) + c(a^2 - b^2)]$

$= (b - c)(a - c)[ab(a - b) + c(a - b)(a + b)]$

$= (b - c)(a - c)(a - b)[ab + c(a + b)]$

$= (b - c)(a - c)(a - b)(ab + ac + bc)$

b) $ac(a + c) - bc(b + c) + ab(a - b) =$

$a^2c + ac^2 - b^2c - bc^2 + a^2b - ab^2 =$

Grupišemo po dva sabirka:

$(a^2c - b^2c) + (ac^2 - bc^2) + (a^2b - ab^2) =$

$c(a^2 - b^2) + c^2(a - b) + ab(a - b) =$

$c(a - b)(a + b) + c^2(a - b) + ab(a - b) =$

$(a - b)[c(a + b) + c^2 + ab] =$

$(a - b)[ca + cb + c^2 + ab] =$

Sada grupišemo sabirke u srednjoj zagradi:

$(a - b)[(ca + c^2) + (cb + ab)] =$

$(a - b)[c(a + c) + b(a + c)] =$

$(a - b)(a + c)(b + c)$

c) $ab(a - b) - ac(a - c) + bc(b - c) =$

$a^2b - ab^2 - a^2c + ac^2 + b^2c - bc^2 =$

Grupišemo po dva sabirka:

$(a^2b - a^2c) + (-ab^2 + ac^2) + (b^2c - bc^2) =$

$a^2(b - c) - a(b^2 - c^2) + bc(b - c) =$

$a^2(b - c) - a(b - c)(b + c) + bc(b - c) =$

$(b - c)[a^2 - a(b + c) + bc] =$

$(b - c)[a^2 - ab - ac + bc] =$

Sada grupišemo sabirke u srednjoj zagradi:

$(b - c)[(a^2 - ac) + (-ab + bc)] =$

$(b - c)[a(a - c) - b(a - c)] = (b - c)(a - c)(a - b)$

d) $\underbrace{(b-c)^3+(c-a)^3}_{Zbir\ kubova}+(a-b)^3=$

$[(b-c)+(c-a)]\cdot[(b-c)^2-(b-c)(c-a)+(c-a)^2]+(a-b)^3=$

$-1\cdot[a-b]\cdot[b^2-2bc+c^2-bc+ab+c^2-ac+c^2-2ca+a^2]+(a-b)(a-b)^2=$

$=[a-b][-b^2+2bc-c^2+bc-ab-c^2+ac-c^2+2ca-a^2+a^2-2ab+b^2]=$

$=(a-b)[3bc-3c^2-3ab+3ac]$

Sada grupišemo sabirke u srednjoj zagradi:

$=(a-b)[(3bc-3c^2)+(-3ab+3ac)]=$

$=(a-b)[3c(b-c)-3a(b-c)]=$

$=(a-b)(b-c)(3c-3a)=3(c-a)(a-b)(b-c)$

e) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=$

$a^3b-a^3c+b^3c-b^3a+c^3a-c^3b=$

Grupišemo sabirke po dva:

$(a^3b-b^3a)+(-a^3c+b^3c)+(c^3a-c^3b)=$

$ab(a^2-b^2)-c(a^3-b^3)+c^3(a-b)=$

$ab(a-b)(a+b)-c(a-b)(a^2+ab+b^2)+c^3(a-b)=$

$(a-b)[ab(a+b)-c(a^2+ab+b^2)+c^3]=$

$(a-b)[a^2b+ab^2-ca^2-abc-cb^2+c^3]=$

Sada grupišemo sabirke u srednjoj zagradi:

$(a-b)[(a^2b-ca^2)+(ab^2-abc)+(-cb^2+c^3)]=$

$(a-b)[a^2(b-c)+ab(b-c)-c(b^2-c^2)]=$

$(a-b)[a^2(b-c)+ab(b-c)-c(b-c)(b+c)]=$

$(a-b)(b-c)[a^2+ab-c(b+c)]=$

$(a-b)(b-c)[a^2+ab-cb-c^2]=$

$(a-b)(b-c)[(ab-cb)+(a^2-c^2)]=$

$(a-b)(b-c)[b(a-c)+(a-c)(a+c)]=$

$(a-b)(b-c)(a-c)[b+a+c]=$

$(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$

f) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc=$

$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc=$

Da bismo sabirke grupisali po dva uzet ćemo da je $2abc=abc+abc$

$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+abc+abc=$

Sada sabirke grupišemo, po dva:

$(a^2b+b^2a)+(a^2c+abc)+(b^2c+abc)+(c^2a+c^2b)=$

$ab(a+b)+ac(a+b)+bc(a+b)+c^2(a+b)=$

$(a+b)[ab+ac+bc+c^2]=$

Sada u srednjoj zagradi grupišemo sabirke, po dva:

$(a+b)[(ab+bc)+(ac+c^2)]=$

$(a+b)[b(a+c)+c(a+c)]=(a+b)(a+c)(b+c)$

g) $bc(a+d)(b-c)-ac(b+d)(a-c)+ab(c+d)(a-b)=$

$bc(ab-ac+db-dc)-ac(ba-bc+da-dc)+ab(ca-cb+da-db)=$

$ab^2c - abc^2 + b^2cd - bdc^2 - a^2bc + abc^2 - a^2cd + adc^2 +$

$a^2bc - ab^2c + a^2bd - ab^2d =$

$b^2cd - bdc^2 - a^2cd + adc^2 + a^2bd - ab^2d =$

Sada grupišemo sabirke po dva:

$(b^2cd - a^2cd) + (-bdc^2 + adc^2) + (a^2bd - ab^2d) =$

$-cd(a^2 - b^2) + dc^2(a - b) + abd(a - b) =$

$-cd(a - b)(a + b) + dc^2(a - b) + abd(a - b) =$

$(a - b)[-cd(a + b) + dc^2 + abd] =$

$(a - b)[-acd - bcd + dc^2 + abd] =$

Grupišemo po dva sabirka u srednjoj zagradi:

$(a - b)[(-acd + dc^2) + (-bcd + abd)] =$

$(a - b)[-cd(a - c) + bd(a - c)] =$

$(a - b)(a - c)[-cd + bd] = d(b - c)(a - c)(a - b)$