1) Riješiti sljedeću eksponencijalnu jednačinu:

$$\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=6 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^x\cdot\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x}{\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x}+\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=6$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt[3]{\left(3-\sqrt{8}\right)\left(3+\sqrt{8}\right)}\right)^x}{\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x}+\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x}+\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=6$$

<u>Smjena:</u> $\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}=t$

$$\frac{1}{t}+t=6\,/\cdot t$$

$$t^2-6t+1=0$$

$$t_1=\frac{-(-6)+\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{6+\sqrt{32}}{2}=\frac{6+2\sqrt{8}}{2}=3+\sqrt{8}$$

$$t_2=\frac{6-\sqrt{32}}{2}=\frac{6-2\sqrt{8}}{2}=3-\sqrt{8}$$

<u>1.slučaj:</u> $\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=t_1=3+\sqrt{8}$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^x=\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^3\Leftrightarrow x_1=3$$

2 slučaj:

$$\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^{x}=3-\sqrt{8}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^{x}=\frac{1}{3+\sqrt{8}}=\left(3+\sqrt{8}\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^{x}=\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^{-3}\Leftrightarrow x_2=-3$$

Rezime:

Rješenja date jednačine su: $x_1=3$ i $x_2=-3$

2) Riješiti sledeću eksponencijalnu jednačinu:

$$\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^{x}+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^{x}=10\quad(1)$$

Isto kao i u predhodnom zadatku imamo:

$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{5+\sqrt{24}}\cdot\sqrt{5-\sqrt{24}}}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}=\frac{\sqrt{5^2-\left(\sqrt{24}\right)^2}}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}=\frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{24}}}$$

Zbog toga je data jednačina (1) ekvivalentna sa:

$$\frac{1}{\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^{x}}+\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^{x}=10\qquad(2)$$

Uvođenjem smjene: $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^{x}=t$ (3) posljednja jednačina (2) se svodi na kvadratnu jednačinu:

$\frac{1}{t}+t=10\Leftrightarrow t^2-10t+1=0$ čija su rješenja:

$$t_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{4\cdot24}}{2}=\frac{10\pm2\cdot\sqrt{24}}{2}=\frac{10}{2}\pm\frac{2\sqrt{24}}{2}=5\pm\sqrt{24}$$

Vraćajući ova rješenja u smjenu (3) ,dobijamo rješenja zadate jednačine:

i) za $t_1 = 5+\sqrt{24}$

$$\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = t_1 = 5+\sqrt{24} = \frac{\left(5+\sqrt{24}\right)\cdot\left(5-\sqrt{24}\right)}{5-\sqrt{24}} = \frac{5^2-\left(\sqrt{24}\right)^2}{5-\sqrt{24}} = \frac{1}{5-\sqrt{24}} = \left(5-\sqrt{24}\right)^{-1}$$

$$= \left(\sqrt{\left(5-\sqrt{24}\right)^{-1}}\right)^2 = \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^{-2}$$

Dakle, $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^{-2} \Leftrightarrow x_1 = -2$

ii) za $t_2 = 5-\sqrt{24}$

$$\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = t_2 = 5-\sqrt{24} = \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^2$$

Dakle, $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x = \left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^2 \Leftrightarrow x_2 = 2$

Rezime:

Rješenja date jednačine (1) su: $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$

3) Riješiti eksponencijalnu jednačinu:

Uputa: Jednačinu riješiti pogodno odabranom smjenom.

$$4^x = 2\cdot 14^x + 3\cdot 49^x \Leftrightarrow$$

$$\left(2^2\right)^x = 2\cdot 2^x\cdot 7^x + 3\cdot\left(7^2\right)^x \Leftrightarrow$$

$$\left(2^x\right)^2 = 2\cdot 2^x\cdot 7^x + 3\cdot\left(7^x\right)^2$$

Uvodimo smjenu: $2^x = u$ i $7^x = v$, pa dobijamo jednačinu:

$$u^2 = 2uv + 3v^2 \Leftrightarrow u^2 - 2uv - 3v^2 = 0$$

Datu jednačinu riješavamo kao kvadratnu po u,pa dobijamo:

$$u_{1,2} = \frac{2v \pm \sqrt{4v^2 - 4\cdot\left(-3v^2\right)}}{2} = \frac{2v \pm \sqrt{16v^2}}{2} = \frac{2v \pm 4v}{2}$$

$u_1 = 3v$ i $u_2 = -v$

Vraćanjem smjene dobijamo:
i) Za $u_1 = 3v$

$$2^x = 3 \cdot 7^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^x = 3 / \log \Leftrightarrow \log\left(\frac{2}{7}\right)^x = \log 3 \Leftrightarrow x \cdot \log\frac{2}{7} = \log 3 \Leftrightarrow x = \frac{\log 3}{\log\frac{2}{7}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{7}} 3$$

ii) Za $u = -v$

$$2^x = -7^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^x = -1,$$

,a ova posljednja jednačina nema rješenja ,jer je eksponencijalna funkcija uvijek pozitivna.