Kompleksni brojevi

Z / 1. Dokazati da je broj $\frac{z+\bar{z}}{1+z\cdot\bar{z}}$ realan za svako z.

Rješenje: Neka je $z = x + iy$ .Tada je $\bar{z} = x - iy$.

$$\frac{z+\bar{z}}{1+z\cdot\bar{z}} = \frac{x+iy+x-iy}{1+(x+iy)\cdot(x-iy)} = \frac{2x}{1+x^2-(iy)^2} = \frac{2x}{1+x^2-i^2y^2} = \frac{2x}{1+x^2+y^2}$$

Time smo dokazali da je dati broj $\frac{z+\bar{z}}{1+z\cdot\bar{z}}$ realan za svako z.

Za samostalan rad: Pokazati da je $\frac{z-\bar{z}}{1+z\cdot\bar{z}}$ imaginaran za svako z=x+iy i $y \neq 0$.

Z / 2. Izračunaj:

a) $(1-i)^5 =$; b) $(1+i)^8 =$

c) $(\sqrt{3}-i)^6 =$; d) $(1+i\sqrt{3})^9 =$

Rješenje:

a) $(1-i)^5 = (1-i)^2\cdot(1-i)^2\cdot(1-i) =$
$= (1-2i+i^2)\cdot(1-2i+i^2)\cdot(1-i) = (1-2i-1)\cdot(1-2i-1)\cdot(1-i) =$
$= (-2i)\cdot(-2i)\cdot(1-i) = 4i^2\cdot(1-i) = -4\cdot(1-i) = -4+4i$

Ili, na drugi način:

$(1-i)^5 = (1-i)^2\cdot(1-i)^3 = (1-2i+i^2)\cdot(1-3\cdot1^2\cdot i+3\cdot1\cdot i^2-i^3) =$
$= (-2i)\cdot(1-3i-3-i\cdot i^2) = (-2i)\cdot(1-3i-3+i) = (-2i)\cdot(-2-2i) =$
$4i+4i^2 = -4+4i$

b) $(1+i)^8 = [(1+i)^2]^4 = [1+2i+i^2]^4 = [1+2i-1]^4 =$
$= [2i]^4 = 2^4\cdot i^4 = 16\cdot1 = 16$

c) $(\sqrt{3}-i)^6 = \left[(\sqrt{3}-i)^2\right]^3 = \left[(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}i+i^2\right]^3 = [2-2\sqrt{3}i]^3 =$
$= [2\cdot(1-\sqrt{3}i)]^3 = 8\cdot(1-\sqrt{3}i)^3 =$
$= 8\cdot\left(1^3-3\cdot1^2\cdot\sqrt{3}i+3\cdot1\cdot(\sqrt{3}i)^2-(\sqrt{3}i)^3\right) =$
$= 8\cdot(1-3\sqrt{3}i+9i^2-3\sqrt{3}i^3) = 8\cdot(1-3\sqrt{3}i-9+3\sqrt{3}i) =$
$= 8\cdot(1-9) = -64$

Ili, na drugi način:

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^6=\left[\left(\sqrt{3}-i\right)^3\right]^2=\left[\left(\sqrt{3}\right)^3-3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot i+3\cdot\sqrt{3}\cdot i^2-i^3\right]^2=$$
$$=\left[3\sqrt{3}-9i-3\sqrt{3}+i\right]^2=\left[-8i\right]^2=64i^2=-64$$

Napomena: Vidimo da je drugi način u posljednjem zadatku lakši.U prvom slučaju kvadriranjem izraza $\sqrt{3}-i$ dobijamo novi kompleksan broj $2-2\sqrt{3}i$ kojeg nadalje treba kubirati. U drugom slučaju, pak, kubiranjem izraza $\sqrt{3}-i$ dobili smo imaginaran broj (-8i) kojeg je trebalo još samo kvadrirati.

d) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^9=\left[\left(1+i\sqrt{3}\right)^3\right]^3=\left[1^3+3\cdot 1^2\cdot i\sqrt{3}+3\cdot 1\cdot\left(i\sqrt{3}\right)^2+\left(i\sqrt{3}\right)^3\right]^3=$

$$=\left[1+3\sqrt{3}i+9i^2+3\sqrt{3}i^3\right]^3=\left[-8+3\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i\right]^3=\left[-8\right]^3=-512$$

<u>Z / 3.</u> Odrediti realne brojeve x i y iz sljedećih jednakosti:

a) $x+(y-1)i=-1+3i$
b) $x-2y+(2x-y)i=3i$
c) $(1-i)x+(1+i)y=i$
d) $(2-3i)x-(1+4i)y=3+i$

Napomena:
Definicja: Dva kompleksna broja: $Z_1=x_1+iy_1$ i $Z_2=x_2+iy_2$ su jednaka onda i samo onda ,ako je realni dio prvog jednak realnom dijelu drugog tj. $x_1=x_2$ i imaginarni dio prvog jednak imaginarnom dijelu drugog kompleksnog broja tj. $y_1=y_2$.
Dakle:

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2\Rightarrow x_1=x_2\wedge y_1=y_2$$
$$x_1=x_2\wedge y_1=y_2\Rightarrow x_1+iy_1=x_2+iy_2$$

Ili kraće napisano,imamo:

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2\Leftrightarrow x_1=x_2\wedge y_1=y_2$$

Rješenje:

a) $x+(y-1)i=-1+3i$
$\Leftrightarrow(x=-1\wedge y-1=3)\Leftrightarrow(x=-1\wedge y=4)$

b) $x-2y+(2x-y)i=3i\Leftrightarrow(x-2y=0\wedge 2x-y=3)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x=2y\wedge 2x-y=3)\Leftrightarrow(x=2y\wedge 4y-y=3)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x=2y\wedge 3y=3)\Leftrightarrow(x=2y\wedge y=1)\Leftrightarrow(x=2\wedge y=1)$

c) $(1-i)x+(1+i)y=i\Leftrightarrow x-xi+y+yi=i\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+y)+(y-x)i = i \Leftrightarrow (x+y=0 \wedge y-x=1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+y=0 \wedge y=x+1) \Leftrightarrow (x+x+1=0 \wedge y=x+1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2x=-1 \wedge y=x+1) \Leftrightarrow \left(x=-\frac{1}{2} \wedge y=x+1\right)\left(x=-\frac{1}{2} \wedge y=\frac{1}{2}\right)$$

d) $(2-3i)x-(1+4i)y = 3+i \Leftrightarrow 2x-3ix-y-4iy = 3+i \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x-y)-(3x+4y)i \Leftrightarrow 3+i \Leftrightarrow (2x-y=3 \wedge -(3x+4y)=1)$$
$$\Leftrightarrow (2x-3=y \wedge -3x-4y=1) \Leftrightarrow (2x-3=y \wedge -3x-8x+12=1)$$
$$\Leftrightarrow (2x-3=y \wedge -11x=-11)$$
$$\Leftrightarrow (2x-3=y \wedge x=1) \Leftrightarrow (y=-1 \wedge x=1)$$

Z / 4. Odrediti realne brojeve x i y, ako je :

$$(3,-1)\cdot(x,y)=(7,1)$$

Rješenje:

$$(3,-1)\cdot(x,y)=(7,1)$$
$$(3x+y,-x+3y)=(7,1) \Leftrightarrow 3x+y=7 \wedge -x+3y=1$$
$$\Leftrightarrow 3x+y=7 \wedge x=3y-1 \Leftrightarrow 3\cdot(3y-1)+y=7 \wedge x=3y-1$$
$$\Leftrightarrow 9y-3+y=7 \wedge x=3y-1 \Leftrightarrow 10y=10 \wedge x=3y-1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=1 \wedge x=3y-1 \Leftrightarrow y=1 \wedge x=2$$

Dakle, $(x,y)=(2,1)$.

Ili,na drugi način:

$$(3,-1)\cdot(x,y)=(7,1) \Leftrightarrow (x,y)=(7,1)\cdot(3,-1)^{-1}=(7,1)\cdot\left(\frac{3}{10},\frac{1}{10}\right)=$$
$$=\left(\frac{21}{10}-\frac{1}{10},\frac{7}{10}+\frac{3}{10}\right)=\left(\frac{20}{10},\frac{10}{10}\right)=(2,1)$$