<u>Uvod u *cijele* i *razlomljene* racionalne izraze</u>

Simboli -5,0,1,-1,10 itd. Mogu predstavljati razne veličine.Kada upotrebljavamo simbol 5,to može biti 5KM, 5kg šećera, 5 ovaca, 5 dječaka odjeljenja VIIa itd.Svi takvi simboli koji mogu da predstavljaju neku **stalnu vrijednost** (masa,površina,broj učenika,itd.) nazivamo **konstantnim ili stalnim veličinama**.Konstantne veličine u praksi nazivamo jednostavno **konstante**.

Međutim,često govorimo o nekoj veličini koja može imati vrijednost redom 5m, 10m, 15m.Ako se ta veličina mijenja onda je možemo označiti simbolom **x, y, a** ili nekim drugim slovom.Tako simbol **a** može da označava dužinu stranice jednakostraničnog trougla tj. a=5cm, a=10cm, a=15cm itd.

To znači da veličina **a** može da se mijenja.Tako ove veličine, koje imaju promjenjivu vrijednost,nazivamo **promjenljive veličine** ili **promjenljivim**.

Promjenljive veličine su,naprimjer: x, y, z, u, v,....,a, b, c,....

U slučaju da pomoću poznate operacije od konstanti obrazujemo izraz,onda se takav izraz naziva **konstantni** ili **brojni racionalni izraz**.

Primjer takvog izraza: $5\cdot 3^2+7\cdot 2^3-8\cdot 3^2=$ itd.

Ako u konstantnom izrazu upotrijebio operacije sabiranja, oduzimanja, množenja i stepenovanja onda se takav izraz naziva **cijeli racionalni brojni izraz**.Izraz formiran od konstantnih i promjenljivih veličina, a pomoću operacija sabiranja, oduzimanja, množenja i stepenovanja zove se **<u>cijeli racionalni izraz ili polinom</u>**.Takvi izrazi su naprimjer:

$3\cdot a+1$; $2x^2-3x+1$; $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}a+\frac{2}{3}$; $2x^4+\frac{1}{2}x^3+7x-11$ itd.

Ako pri formiranju izraza od konstantnih veličina upotrebljavamo i operaciju dijeljenja,pa se u brojnom izrazu dobije razlomak, onda se takav izraz naziva **razlomljeni racionalni konstantni izraz.**

Primjeri takvih izraza su: $\dfrac{5\cdot 3+2\cdot 2^2}{4\cdot 5+7}$; $\dfrac{10\cdot 2^3-11\cdot 4^4}{11^3-7}$ itd.

Kod formiranja <u>razlomljenih racionalnih izraza</u> mora se dobro voditi računa da se u imeniocu (nazivniku ili djeliocu) ne pojavi broj 0, jer se nulom, kao što znamo,ne može dijeliti.Dijeljenje sa nulom nema smisla ili kažemo da dijeljenje sa nulom NIJE definirano.
Takav je,naprimjer,izraz:

$$\frac{3\cdot(-2)-2\cdot(-2)^2}{4-32:8}=\frac{-6-8}{4-4}=\frac{-14}{0}$$

<u>TREBA DOBRO ZAPAMTITI:</u>

Dijeljenje sa nulom nema smisla, ne možemo dijeliti sa nulom ili dijeljenje sa nulom nije definirano.

Izraz formiran od konstanti i promjenljivih pomoću operacija sabiranja, oduzimanja, množenja ,dijeljenja i stepenovanja naziva se **<u>razlomljeni racionalni izraz</u>** ili samo **<u>racionalni (često i algebarski) izraz.</u>**

Vrijednosti promjenljive veličine za koju je definisan razlomljeni racionalni izraz naziva se **domena ili područije definisanosti**.

To su,naprimjer, izrazi oblika:

$$\frac{2a-6}{a-4} \quad ; \quad \frac{6}{y^2} \quad ; \quad \frac{x-2}{x^2-x-1} \quad ; \quad \frac{x^2-4x+9}{x^2+1} \qquad \text{itd}$$

Vrijednosti za koje je razlomljeni racionalni izraz definiran naziva se <u>definiciono dodručije.</u>

<u>Primjer:</u>
Odredi za koje promjenljive vrijednosti je razlomljeni racionalni izraz definiran

a) $\frac{2a-6}{a-4}$; b) $\frac{x^2-4x+9}{x^2+1}$

<u>Rješenje:</u>

a)Definiran je za sve $a \in \Re$, osim za a=4,je je za a=4, a – 4 = 4 – 4=0,a dijeljenje sa nulom nije definirano.

Možemo pisati i ovako: $a-4 \neq 0 \Rightarrow a \neq 4$,tj. izraz je definiran za $\forall\ a \in \Re \setminus \{4\}$(što čitamo: za svako a iz skupa realnih brojeva osim za 4).

b) x^2+1 je pozitivno za svako x iz $\Re$,pa je izraz definiran za sve x iz $\Re$.

<u>Napomena:</u> $\Re$ (ili negdje označeno sa R) je skup realnih brojeva.

<u>Riješeni zadaci</u>

1) Izračunaj vrijednost brojnog izraza:
Uputa: Najprije obavi operacije stepenovanja i množenja,a nakon toga sabiranja i oduzimanja.

a) $5\cdot 3^2+7\cdot 2^3-8\cdot 3^2=5\cdot 9+7\cdot 8-8\cdot 9=45+56-72=29$

b) $5\cdot 2^5-10\cdot 2^3+12\cdot 10=5\cdot 32-10\cdot 8+12\cdot 10=160-80+120=200$

c) $5^3+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2-2^3=125+2\cdot 9+3\cdot 16-8=125+18+48-8=183$

$d) 10^2-3\cdot 4^2+5^2\cdot 2-5^3\cdot 1^3=100-3\cdot 16+25\cdot 2-125\cdot 1=100-48+50-125=-23$

e) $2\cdot 3^4-3\cdot 3^3+4\cdot 3^2-5\cdot 3^1=2\cdot 81-3\cdot 27+4\cdot 9-5\cdot 3=162-81+36-15=102$

$f)-0,2\cdot 10\cdot(-2)^3+10\cdot(-2)^2-0,5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4=-0,2\cdot 10\cdot(-8)+10\cdot 4-0,5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4=$
$=16+40+1=57$

$g) 2^5\cdot\left[\left(10^2-9^2\right)-\left(4^3-2\cdot 5^2\right)\right]=32\cdot\left[(100-81)-(64-2\cdot 25)\right]=$
$32\cdot\left[19-(64-50)\right]=32\cdot\left[19-14\right]=32\cdot 5=160$

2) Sastaviti cijeli racionalni izraz od konstanti 5, 7, 11 te promjenljivih a, b, x, y^2 koristeći računske operacije sabiranja, oduzimanja i množenja.

Rješenje: Ovaj zadatak se može uraditi na bezbroj načina.Evo jednog načina:

$7y^2-11x-5a+b$ ....itd.

(Pokušaj i ti da napišeš jedan takav izraz!)

3) Za samostalan rad: Sastaviti cijeli racionalni izraz od konstanti 2, 5, 9 i promjenljivih a, b, x, y.

4) Izračunaj vrijednost sledećih izraza:

a) x^2-5x+6 za $x=2$ i za $x=5$

b) x^3-x^2+x za $x=0$ i za $x=5$
c) $2x^3-4x^2+5x-1$ za $x=-1$ i za $x=3$
Rješenje:

a) Za x=2 i za x= 5 , redom imamo:

$2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$

$5^2 - 5 \cdot 5 + 6 = 25 - 25 + 6 = 6$

b) Za x=0 i za x=5 , redom imamo:

$0^3 - 0^2 + 0 = 0$

$5^3 - 5^2 + 5 = 125 - 25 + 5 = 105$

c) Ostavljamo za samostalan rad učenika.

5) Za koje vrijednosti promjenljive x je definiran izraz (postoji izraz):

a) $x^2 - 5x + 6 =$

b) $x^3 + x^2 - 2x - 3 =$

c) $x^4 - x^3 + x^2 + x + 1 =$

Rješenje: Data tri izraza pod a), b) i c) su cijeli racionalni izrazi.Nad promjenljivom se obavljaju operacije stepenovanja, množenja, sabiranja i oduzimanja, koje su neograničeno izvodive u skupu R.
Zato se kaže da su cijeli racionalni izrazi definirani za sve vrijednosti $x \in R$.

6) Odrediti vrijednost promjenljive za koju su cijeli racionalni izrazi jednaki nuli:
Uputa: Izraz izjednačiti sa nulom, pa riješiti odgovarajuću jednačinu.

a) $x + 5$; b) $3x - 5$; c) $2y + 1$; d) $7 - 2b$; e*) $x^2 - 5x + 6$

Rješenje:

a) $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

b) $3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

c) $2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{2}$

d*) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Ovde se javlja potreba za rješavanjem kvadratne jednačine.Kao što smo već naglasili česta je potreba za rješavanjem ovih jednačina još u osnovnoj školi.Naprimjer, ako trebamo odrediti koji mnogougao ima 35 dijagonala dolazimo u situaciju rješavanja kvadratne jednačine.
Jednačinu oblika: $ax^2 + bx + c = 0$ (1), gdje su a, b i c realni brojevi i $a \neq 0$ nazivamo kvadratna jednačina.Ova jednačina ima dva rješenja i ona su:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad (2) \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \quad (3)$$

Dakle, u našem slučaju je $a = 1$, $b = -5$ i $c = 6$
Uvrštavanjem ovih vrijednosti u formule (2) i (3) dobijamo:
$x_1 = 2$ i $x_2 = 3$
Dakle, za te vrijenosti izraz pod d) je jednak nuli što je trebalo naći.

Napomena: Zadaci označeni sa (*) su za učenike koji žele naučiti nešto više.

7) Odredi vrijednosti za koju razlomljeni racionalni izrazi imaju vrijednost nula:
Uputa: Da bi razlomljeni racionalni izraz oblika $\frac{A(x)}{B(x)}$ imao vrijednost nula dovoljno je da je $A(x) = 0$.

a) $\frac{x-1}{x+5}$; b) $\frac{x-6}{y-2x}$; c) $\frac{x^2-4}{2a-5b}$; d) $\frac{7a-b}{5x-y}$; e) $\frac{3a+1}{a-1}$; f) $\frac{2x-2{,}5}{x^2+1}$

Rješenje:

a) $\frac{x-1}{x+5} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b) $\frac{x-6}{y-2x} = 0 \Leftrightarrow x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 6$

c) $\frac{x^2-4}{2a-5b} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$

d) $\frac{7a-b}{5x-y} = 0 \Leftrightarrow 7a - b = 0 \Leftrightarrow b = 5a$

e) i f) Ostavljamo za samostalan rad učenika.

8) Za koje vrijednosti **a** izraz nije definiran:

a) $\frac{2a-1}{a+5}$; b) $\frac{3a^2+a-1}{2a-1}$; c) $\frac{a+1}{a^2-1}$; d) $\frac{a+5}{a-5}$; e) $\frac{a}{a-1}$; f) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$

Rješenje:

a) $a+5 \neq 0 \Rightarrow a \neq -5$. Izraz je definiran za sve vrijednosti osim za $a=-5$, jer je tada $a+5=-5+5=0$, a dijeljenje sa nulom nije definirano.

b) $2a-1 \neq 0 \Rightarrow 2a \neq 1 \Rightarrow a \neq \frac{1}{2}$. Izraz je definiran za sve vrijednosti , tj. $\forall$ a$\in \Re$ osim za $a=\frac{1}{2}$, jer je tada $2a-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$, a dijeljenje nulom nije definirano.

c) $a^2-1 \neq 0 \Rightarrow (a-1)\cdot(a+1) \neq 0 \Rightarrow a \neq 1 \wedge a \neq -1$. Dakle, izraz je definiran za sve a$\in \Re$ osim za $a=1$ i $a=-1$, jer je za te vrijednosti $a^2-1=0$.

d) Za samostalan rad.

e) Za samostalan rad.

f) $a^2+1 \neq 0$ za sve realne vrijednosti, jer je a^2+1 uvijek pozitivno.Zato je dati izraz definiran za sve vrijednosti promjenljive a.

9) Za koje vrijednosti promjenljive **x** je definiran izraz:

a) $\frac{x-1}{x+2}$; b) $\frac{x+5}{x-1}$; c) $\frac{2x+1}{2x-3}$; d) $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$; e) $\frac{x^2-2}{x^2-4}$; f) $\frac{x^2+2x}{x^2-9}$

g) $\frac{x^2+4x}{x^2-16}$; h) $\frac{3x-7}{121-x^2}$; i*) $\frac{x^2-7}{x^2-5x+6}$; j*) $\frac{3-x}{x^4-1}$

Rješenje:

a) $\frac{x-1}{x+2}$,

$x+2\neq 0 \Rightarrow x\neq -2$. Dakle, izraz je definiran za sve x$\in \Re$ osim za $x=-2$, jer je tada $-2+2=0$ što znači da bi se tada pojavio izraz oblika $\frac{-2-1}{-2+2}=\frac{-3}{0}$ za $x=-2$, a dijeljenje nulom nije definirano.

b) $\frac{x+5}{x-1}$

$x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$. Vidimo, dakle, da je izraz definisan za sve vrijednosti varijable x,osim za $x=1$,jer se za tu vrijednost varijable (promjenljive) pojavljuje izraz oblika $\frac{1+5}{1-1}=\frac{6}{0}$,a dijeljenje sa nulom nije definirano.

c) $\frac{2x+1}{2x-3}$

$2x-3\neq 0 \Rightarrow 2x\neq 3 \Rightarrow x\neq \frac{3}{2}$. Izraz je ,dakle, definiran za sve vrijednosti varijable x, osim za $x=\frac{3}{2}$, jer se za tu vrijednost varijable pojavljuje izraz oblika $\frac{2\cdot\frac{3}{2}+1}{2\cdot\frac{3}{2}-3}=\frac{4}{0}$,a dijeljenje nulom nije definirano.

d) $\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

$x^2+1\neq 0$ za sve vrijednosti varijable x, tj. $\forall x\in\Re$,pa je zbog toga dati racionalni izraz definiran za sve vrijednosti varijable x.

e) $\frac{x^2-2}{x^2-4}$

$x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \wedge x\neq -2$.Izraz je definiran za sve vrijednosti varijable x, osim za $x=2$ i $x=-2$.

Napomena: Jednačina oblika $A(x)\cdot B(x)=0$ ima za rješenje $A(x)=0$ ili $B(x)=0$.
To pišemo : $A(x)\cdot B(x)=0 \Leftrightarrow A(x)=0 \vee B(x)=0$.
Osim toga imamo: $A(x)\cdot B(x)\neq 0 \Leftrightarrow A(x)\neq 0 \wedge B(x)\neq 0$.
U našem slučaju imali smo: $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x+2)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \wedge x\neq -2$

f) $\frac{x^2+2x}{x^2-9}$

$x^2-9\neq 0 \Rightarrow (x-3)\cdot(x+3)\neq 0 \Rightarrow x\neq 3 \wedge x\neq -3$.Izraz je, dakle, definiran za sve vrijednosti x, osim za $x=3$ i $x=-3$

g) Ostavljamo za samostalan rad učenika.

h) $\frac{3x-7}{121-x^2}$

$121-x^2\neq 0 \Rightarrow 11^2-x^2\neq 0 \Rightarrow (11-x)\cdot(11+x)\neq 0$
$\Rightarrow 11-x\neq 0 \wedge 11+x\neq 0 \Rightarrow x\neq 11 \wedge x\neq -11$

Izraz je definiran za sve vrijednosti x, osim ua $x=11$ i $x=-11$

Napomena:
Ovdje smo izraz u imeniocu $121-x^2$, kao i u predhodna tri zadatka, rastavili na faktore pomoću razlike kvadrata.

i*) $\frac{x^2-7}{x^2-5x+6}$

Potrebno je dati kvadratni trinom u imeniocu x^2-5x+6 rastaviti na faktore (pogledaj „rastavljanje polonoma na faktore“).

$x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=x\cdot(x-2)-3\cdot(x-2)=(x-2)\cdot(x-3)$
Dakle, imamo:

$x^2-5x+6\neq 0 \Rightarrow (x-2)\cdot(x-3)\neq 0 \Rightarrow x-2\neq 0 \wedge x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq 2 \wedge x\neq 3$

Izraz je definiran za sve vrijednosti varijable (promjenljive) x,osim za $x=2$ i $x=3$, jer se za te vrijednosti varijable pojavljuju izrazi oblika: $\frac{2^2-7}{0}=\frac{-3}{0}$ i $\frac{3^2-7}{0}$, a dijeljenje sa nulom nije definirano.

j*) $\frac{3-x}{x^4-1}$

Opet je potrebno izraz u imeniocu x^4-1 rastaviti na faktore.

$x^4-1=(x^2)^2-1=(x^2-1)\cdot(x^2+1)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x^2+1)$

Dakle, imamo:

$$x^4 - 1 \neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x^2+1) \neq 0 \Rightarrow x-1 \neq 0 \wedge x+1 \neq 0 \wedge x^2+1 \neq 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

Izraz $x^2 + 1$ je pozitivan za bilo koju vrijednost varijable x.

Izraz ,pod j) je ,dakle, definisan za sve vrijednosti varijable x, osim za $x = 1$ i $x = -1$

10) Za samostalan rad:

Odredi za koje vrijednosti varijable (promjenjljive) x je izraz definiran:

a) $\frac{x-2}{x-3}$; b) $\frac{2x-5}{x}$; c) $\frac{2x-7}{5x-11}$; d) $\frac{x-3}{x^2-1}$